

Meccanica Quantistica - Scritto 30/01/2008

1) Un oscillatore armonico piano ha come hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

- a) Si determinino i livelli energetici e la relativa degenerazione dopo aver riscritto l'hamiltoniana in termini degli operatori

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x \quad \hat{a}_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{y} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_y$$

e dei loro hermitiani coniugati.

- b) Scrivere l'operatore momento angolare $\hat{L}_z$ in termini degli operatori $\hat{a}_x$ e $\hat{a}_y$ e dei loro hermitiani coniugati. Determinare inoltre la rappresentazione matriciale di $\hat{L}_z$ relativa all'autospazio corrispondente al secondo stato eccitato.
- c) Nell'ipotesi che l'oscillatore sia in un autostato dell'energia corrispondente al secondo stato eccitato, determinare i possibili risultati di una misura di $\hat{L}_z$.

2) Una particella di spin 1/2 (il cui operatore di spin è $\hat{S} = \hat{S}_x\hat{e}_x + \hat{S}_y\hat{e}_y + \hat{S}_z\hat{e}_z$) è posta in un campo magnetico B uniforme e parallelo all'asse z in modo che l'Hamiltoniana è $\hat{H} = -\gamma\hat{B}\hat{S}_z$. Si considerino gli operatori dipendenti dal tempo:

$$\hat{s}_j(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{S}_j e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \quad j = x, y, z$$

- a) Utilizzando le relazioni di commutazione degli operatori $\hat{S}_j$, scrivere un sistema di equazioni differenziali per gli operatori $\hat{s}_j(t)$ (derivandoli opportunamente rispetto al tempo).
- b) Dopo aver indicato la condizione iniziale $\hat{s}_j(0) = \dots$, risolvere il precedente sistema di equazioni per i tre operatori $\hat{s}_j(t)$ con tale condizione iniziale.
- c) Si supponga che nello stato $|\psi(0)\rangle$ al tempo $t=0$ il valor medio dello spin sia $\langle\hat{S}\rangle = \frac{\hbar}{2}\hat{e}_x$. Utilizzando il risultato del punto b) determinare il valor medio di $\hat{S}$ a tutti i tempi.